



ISSN: 2617-6548

URL: www.ijirss.com



Barriers Role of Zero-Divisor Graph in Power Set Ring

Abdul Jamil Nazary

Department of Mathematics, Faculty of Education, Takhar University, Takhar, Afghanistan

(Email: jamil.nazary0030@gmail.com)

Abstract

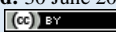
This review presents the high performance of failure-resistant structural device system for the sustainable and flexible buildings. Firstly, the motivation and basic principles as well as methodology of the developing device system are explicitly illustrated. Then, the structural detail and seismic response of base isolation systems, namely, lead Rubber Bearing (LRB), HDLRB isolators, viscous damper base isolator (BIPD) and sliding bearing isolator (BISS) are summarized. The theoretical and experimental study results was shown that all four types of isolator system can be able to minimize damage after seismic an earthquake to the structural system. The viscous damper devices and energy dissipate as well as viscoelastic and fluid viscous dampening can be able to enhance the energy dissipation capacity of structural system under an earthquake loading. A placement of L shape, shear walls at the structural configuration plan is given more efficient behavior under seismic load than all other placements of shear walls at the building's configuration. Many numerical specimens of tunnel form buildings were constructed and modelled to analyze and interpreted the dynamic and static cyclic response of structures against seismic force. The deformation of the dynamic response of tunnel form building was smaller by using Carbon Fiber Reinforced Polymer (CFRP) repairing and retrofitting method. Contradictory, the usage of base isolations, energy dissipation devices, shear walls and tunnel form buildings can enhance the efficiency of structures under seismic force by reducing the economic cost saving in their construction.

Keywords: Base Isolator, Shear Walls, Tunnel Form Buildings, Passive Energy Dissipates.

DOI: 10.53894/ijirss.v4i3.75

Funding: This study received no specific financial support.

History: Received: 24 March 2020/Revised: 2 June 2021/Accepted: 17 June 2021/Published: 30 June 2021

Licensed: This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) 

Competing Interests: The author declares that there are no conflicts of interests regarding the publication of this paper.

Transparency: The author confirms that the manuscript is an honest, accurate, and transparent account of the study was reported; that no vital features of the study have been omitted; and that any discrepancies from the study as planned have been explained.

Ethical: This study follows all ethical practices during writing.

نقش گراف قاسم‌های صفر در رینگ ست طاقت

عبدالجمیل نظری

دیارتمنت ریاضی، دانشکده تعلیم و تربیه، دانشگاه تخار، تخار، افغانستان

خلاصه

نخستین مقاله در نظریه گراف را اوایل ریاضی‌دان مشهور سوپسی نوشت که در سال 1736 منتشر شد. از دیدگاه ریاضی، نظریه گراف در ابتدا مهم به نظر نمی‌رسید، زیرا بیشتر با معماهای سرگرم‌کننده سروکار داشت. اما پیشرفت‌های اخیر در ریاضیات، به‌خصوص کاربردهای آن، تکانی قوی به نظریه گراف داده است. بنابراین مقاله حاضر تحت عنوان (نقش گراف قاسم‌های صفر در رینگ ست طاقت) تحریر گردیده است. این تحقیق نقش گراف قاسم‌های صفر را در رینگ ست طاقت واضح می‌سازد و برای جمع‌آوری اطلاعات از مطالعات قبلی به روش کتابخانه‌ای استفاده شده است. در این مقاله ابتدا گراف ست قاسم‌های صفر رینگ اختیاری R را تعریف می‌کنیم. سپس گراف قاسم‌های صفر را در رینگ ست طاقت معرفی می‌نمائیم. درحالی که رأس تنها با حرف K_1 نمایش داده شده و عناصر از یک رینگ اختیاری که قاسم‌های صفر نیستند رأس‌های بدون اضلاع در گراف قاسم‌های صفر همان رینگ می‌باشند. در ادامه به بررسی این‌که در رینگ ست طاقت یک گراف چه وقت مسطح است می‌پردازیم. یافته‌های این تحقیق نشان می‌دهد که: اگر تعداد عناصر ست $X \neq \emptyset$ کمتر از 4 باشد، گراف قاسم‌های صفر رینگ (X) مسطح بوده و اگر تعداد عناصر ست X بزرگتر یا مساوی 4 باشد، گراف قاسم‌های صفر رینگ (X) مسطح نمی‌باشد.

کلمات کلیدی: ست، گراف، قاسم‌های صفر، گراف قاسم‌های صفر

1. مقدمه

نظریه گراف یکی از موضوعات مورد تحقیق در ریاضیات جدید است و مفهوم گراف در ریاضیات از گذشته تا حال مورد بحث می‌باشد. مثلاً گراف رابطه‌ها و توابع موارد استعمال زیاد دارند [1]. قرن هجدهم میلادی آغاز نظریه گراف امروزی است. از قرن نهم به بعد نظریه گراف بنابر کاربرد آن در بخش‌های مختلف مورد بحث قرار گرفت که در این مقطع زمانی یک ساحت تحقیقاتی می‌باشد [2]. در این مورد از سال 1988 تا حال تحقیقات جریان دارد و ریاضی‌دانان در سال‌های 2005، 2006 و 2007 نتایج تحقیق‌شان را نشر کرده اند [3]. مسأله که در این‌جا مورد توجه قرار می‌گیرد، این است که تحت کدام شرایط در رینگ ست طاقت یک گراف مسطح می‌باشد. در این مقاله ابتدا گراف، گراف فرعی، گراف فرعی القایی، گراف r - منظم، گراف کامل، گراف دوبخشی، گراف دوبخشی کامل، گراف ستاره‌ای، راه، راه بسته، مسیر، گراف همبند، قطر گراف همبند، گراف مسطح و گراف ست قاسم‌های صفر رینگ اختیاری R را تعریف می‌کنیم. سپس گراف قاسم‌های صفر رینگ ست طاقت را معرفی می‌نمائیم. در ادامه به معرفی این‌که تحت کدام شرایط در رینگ ست طاقت یک گراف مسطح است، پرداخته می‌شود. این تحقیق، جهت بررسی گراف قاسم‌های صفر در رینگ ست طاقت انجام یافته است.

2. تعریف‌ها و قضایا

تعریف 1: فرض کنید $V(\Gamma) \neq \emptyset$ یک ست متناهی از رأس‌ها بوده و $E(\Gamma)$ ست است که هر عنصر آن یک جوره مرتب از عناصر $V(\Gamma) \times V(\Gamma)$ باشد، در آن‌صورت جوره مرتب $(V(\Gamma), E(\Gamma))$ را یک گراف بدون جهت می‌نامیم و با علامت $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ نشان می‌دهیم، که در آن $V(\Gamma)$ ست رأس‌ها و $E(\Gamma)$ ست اضلاع Γ را نشان می‌دهند [4].

تعریف 2: فرض کنید Γ یک گراف با ست رأس‌های $V(\Gamma)$ و ست اضلاع $E(\Gamma)$ باشد، در آن‌صورت:

- (الف) اگر v_i و v_j دو رأس Γ و (v_i, v_j) ضلعی از آن باشد، آن‌گاه می‌گوئیم v_i و v_j مجاورند که در آن v_i رأس ابتدائی و v_j رأس انتهائی می‌باشد.
 (ب) تعداد اضلاع که از رأس v می‌گذرد درجه v نامیده می‌شود که با $\deg(v)$ نشان می‌دهیم. همین‌طور رأس را که درجه آن صفر است، رأس تنها نامیده و با K_1 نمایش می‌دهیم. منظور از K_1 ، یک رأس تنها است [5].
 (ج) یک گراف فرعی S از Γ عبارت است از گرافی می‌باشد که اضلاع آن ست فرعی از $E(\Gamma)$ همراه با رأس‌های متصل به این اضلاع باشد. بدین ترتیب هر گراف، گراف فرعی خود است.
 (د) یک گراف فرعی القایی U از Γ عبارت از گرافی می‌باشد که رأس‌های آن ست فرعی از $V(\Gamma)$ همراه با تمام اضلاع از Γ که دو رأس هر یک از این اضلاع شامل $V(U)$ است.

تعریف 3: گراف Γ را r - منظم گوئیم اگر درجه هر رأس Γ برابر r باشد [6].

تعریف 4: گراف n رأسی و $(n-1)$ - منظم را گراف کامل گوئیم و با K_n نشان می‌دهیم.

تعریف 5: گراف Γ را دو بخشی گوئیم هرگاه $V(\Gamma) = V_1(\Gamma) \cup V_2(\Gamma)$ و $V_1(\Gamma) \cap V_2(\Gamma) = \emptyset$ باشد، به قسمی که هیچ دو رأس در V_i ($i=1,2$) مجاور نباشند. به علاوه اگر هر رأس از $V_1(\Gamma)$ با هر رأس $V_2(\Gamma)$ مجاور باشد، آن را گراف دو بخشی کامل نامیده و با $k_{m,n}$ نشان می‌دهیم. که در آن $|V_1(\Gamma)| = m$ و $|V_2(\Gamma)| = n$ ، توجه کنید که $k_{m,n}$ به تعداد $m+n$ رأس و mn ضلع دارد. همچنین یک گراف دو بخشی کامل به صورت $K_{1,n}$ را یک گراف ستاره‌ای می‌نامیم [7].

تعریف 6: فرض کنید Γ یک گراف و v_i و v_j دو رأس آن باشند. یک راه به طول l از v_i به v_j ، ردیف متناهی از رأس‌ها و اضلاع Γ به صورت زیر است:

$$v_i = u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, e_3, \dots, e_l, u_l = v_j$$

به قسمی که برای هر $(1 \leq t \leq l)$ ، رأس‌های u_t و u_{t-1} مجاورند. در این تعریف تکرار اضلاع و رأس‌ها مجاز است.

تعریف 7: راه بسته در گراف Γ راهی به صورت زیر است:

$$v_i = u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, e_3, \dots, e_l, u_l = v_j$$

به قسمی که $v_i = v_j$ باشد [8].

تعریف 8: راهی که ضلع و رأس تکراری نداشته باشد را یک مسیر می‌نامیم. یک مسیر n رأسی را با P_n نشان می‌دهیم. تعداد اضلاع این مسیر را طول مسیر می‌گوئیم. هر رأس یک مسیر با طول صفر است.

تعریف 9: گراف Γ را همبند گوئیم هرگاه بین هر دو رأس آن راهی وجود داشته باشد. به گرافی که همبند نباشد، ناهمبند گوئیم. در یک گراف همبند، درجه هر رأس حداقل برابر یک است. هر گراف ساده همبند n رأسی، حداقل $n-1$ ضلع دارد.

تعریف 10: فرض کنید Γ یک گراف، v_i و v_j دو رأس آن باشند. طول کوتاه ترین راه بین v_i و v_j را فاصله بین v_i و v_j می‌نامیم. و آن را با $\partial(v_i, v_j)$ نشان می‌دهیم. اگر چنین راهی موجود نباشد، آن‌گاه $\partial(v_i, v_j) = \infty$ بوده و $\partial(v_i, v_j)$ خاصیت متریک دارد، یعنی:

$$\text{الف) همواره، } \partial(v_i, v_j) \geq 0 \text{ و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که } v_i = v_j$$

$$\text{ب) } \partial(v_i, v_j) = \partial(v_j, v_i)$$

$$\text{ج) } \partial(v_i, u_l) \leq \partial(v_i, v_j) + \partial(v_j, u_l)$$

با قرار دادن طول هر ضلع برابر 1، Γ یک فضای متریک می‌باشد [9].

د) قطر گراف همبند Γ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{diam}(\Gamma) = \max\{\partial(x, y) \mid x, y \in V(\Gamma)\}$$

اگر گراف Γ مرکب از یک رأس تنها باشد، $\text{diam}(\Gamma) = 0$ [10]

تعریف 11: گراف مسطح گرافی است که بتوان در مستوی به قسمی رسم کرد که اضلاع آن متقاطع نباشند. می‌توان گراف کامل با چهار رأس K_4 را بدون تقاطع اضلاع رسم کرد. لذا K_4 یک گراف مسطح می‌باشد. سال‌های زیادی است که ریاضی‌دانان برای توصیف گراف‌های مسطح و غیرمسطح تلاش می‌کنند. این مسأله بالاخره در سال 1930 توسط کوراتوسکی ریاضی‌دان لهستانی حل شد. گراف‌های K_5 و $K_{3,3}$ غیرمسطح اند [11].

قضیه 1: گراف Γ مسطح است اگر و تنها اگر K_5 ، $K_{3,3}$ را به عنوان گراف فرعی نداشته باشد. اثبات قضیه 1 در منبع شماره [10] مطالعه شده است.

تعریف 12: فرض کنید R یک رینگ و $R^* = R - \{0\}$ باشد. گراف قاسم‌های صفر R که با $\Gamma(R)$ نشان می‌دهیم، گرافی می‌باشد که رأس‌های آن عناصر R^* است. دو عنصر مختلف $a, b \in R^*$ را باهم مجاور گوئیم، اگر $ab = ba = 0$ باشد. درحالی‌که a و b هر دو رأس مجاور یک ضلع $\Gamma(R)$ است.

تعریف 13: فرض کنید $R = P(X)$ یک رینگ ست طاقت روی ست غیر خالی X و $R^* = R - \{0\}$ باشد. گراف قاسم‌های صفر رینگ R را که با $\Gamma(R)$ نشان می‌دهیم، گرافی می‌باشد که رأس‌های آن عناصر R^* می‌باشند. هرگاه $AB = A \cap B = \emptyset$ باشد. دو عنصر مختلف $A, B \in R^*$ باهم مجاورند، درحالی‌که A و B هر دو رأس مجاور یک ضلع گراف $\Gamma(R)$ است [12].

قضیه 2: اگر تعداد عناصر ست $X \neq \emptyset$ کمتر از 4 باشد، آن‌گاه گراف قاسم‌های صفر رینگ $P(X)$ مسطح است. اثبات:

الف) اگر $X = \{a\}$ باشد، آن‌گاه:

$$R = P(X) = \{X, \emptyset\} \Rightarrow R^* = R - \{\emptyset\} = \{X\}$$

$$\Rightarrow \Gamma(R) = K_1$$

بنابراین $\Gamma(R)$ یک گراف مسطح است.

ب) اگر $X = \{a, b\}$ باشد، آن‌گاه:

$$R = P(X) = \{\{a\}, \{b\}, X, \emptyset\}$$

$$\Rightarrow R^* = R - \{\emptyset\} = \{\{a\}, \{b\}, X\} \Rightarrow \Gamma(R) = P_2 \cup K_1$$

بنابراین $\Gamma(R)$ یک گراف مسطح است.

ج) اگر $X = \{a, b, c\}$ باشد، آن‌گاه:

$$R = P(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$\Rightarrow R^* = R - \{\emptyset\} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\} \quad \blacksquare$$



شکل 1: گراف قاسم‌های صفر رینگ ست طاقت مثلثی.
 در شکل 1 دیده می‌شود که به هر رأس آن یک ضلع وصل است. بنابراین $\Gamma(R)$ یک گراف مسطح است.
 قضیه 3: اگر $X = \{a, b, c, d\}$ باشد، آنگاه گراف قاسم‌های صفر رینگ $P(X)$ مسطح نیست.
 اثبات:

$$R = P(X) = \left\{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X, \emptyset \right\}$$

$$\Rightarrow R^* = R - \{\emptyset\} = \left\{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X \right\}$$

فرض کنید $A = \{\{b\}, \{d\}, \{b, d\}\}$ و $B = \{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ باشد که $\Gamma(P(X)) = A \cup B$. به آسانی دیده می‌شود که H با $K_{3,3}$ هم قوه است. بنابراین طبق قضیه (1) گراف قاسم‌های صفر رینگ $P(X)$ مسطح نیست. اما گراف کامل K_4 با ست رؤس $V(K_4) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ را به عنوان گراف فرعی با خود دارد.

نتیجه 1. اگر تعداد عناصر ست X بزرگتر یا مساوی 4 باشد، آنگاه گراف قاسم‌های صفر رینگ $P(X)$ مسطح نیست [13].

قضیه 4: فرض کنید A و B دو ناحیه تمامی، $R = A \times B$ و $R^* = A \times B - \{(0, 0)\}$ باشد، در آن صورت گراف قاسم‌های صفر رینگ R ، دوبخشی کامل است.

اثبات: فرض کنید $A^* = A - \{0\}$ ، $B^* = B - \{0\}$ و $V_1 = \{(a, 0) | a \in A^*\}$ و $V_2 = \{(0, b) | b \in B^*\}$ باشد. چون A و B دو ناحیه تمامی اند، رؤس V_i ($i = 1, 2$) با هم وصل نیستند. از طرف دیگر $(a, 0)(0, b) = (0, 0)$ ، پس رأس V_1 به رأس V_2 وصل است. بنابراین $\Gamma(R) = K_{m,n}$ است که در آن $m = |A^*|$ ، $n = |B^*|$ می‌شود، در صورتی که $A = \mathbb{Z}_2$ باشد، آنگاه گراف قاسم‌های صفر $\Gamma(R)$ با شرط $|\Gamma(R)| = |B|$ یک گراف ستاره‌ای است [14].

جهت به دست آوردن معلومات بیشتر در مورد مفهوم گراف قاسم‌های صفر رینگ‌های تبدلوی رجوع شود. همان طور که ملاحظه می‌کنیم عناصر از یک رینگ که قاسم صفر نیستند رؤس بدون اضلاع در گراف قاسم‌های صفر همان رینگ می‌باشند. برای اینکه گراف وابسته به رینگ، رأس تنها نداشته باشد تعریف ذیل را برای گراف قاسم‌های صفر یک رینگ در نظر می‌گیریم.

تعریف 14: فرض کنید R یک رینگ، $Z(R^*)$ ست قاسم‌های صفر رینگ R به غیر از صفر باشد. گراف قاسم‌های صفر R را که با $\Gamma(R)$ نشان می‌دهیم، گرافی می‌باشد که رأس‌های آن عناصر $Z(R^*)$ می‌باشد. دو عنصر مختلف $a, b \in Z(R^*)$ با هم مجاورند، هرگاه $ab = ba = 0$ باشد. درحالی که a و b هر دو رأس مجاور یک ضلع $\Gamma(R)$ می‌باشد [15].

قضیه 5: فرض کنید R یک رینگ تبدلوی با $Z(R^*) \neq \emptyset$ باشد، در آن صورت گراف قاسم‌های صفر $\Gamma(R)$ همبند است و $diam(\Gamma(R)) \leq 3$.

اثبات: فرض کنید دو عنصر مختلف $x, y \in Z(R^*)$ باشد.

اگر $xy = 0$ باشد، آنگاه $d(x, y) = 1$ است. فرض کنید $xy \neq 0$ است.

اگر $x^2 = y^2 = 0$ باشد، آنگاه طبق تعریف (8)، $x - xy - y$ یک مسیر به طول 2 است. بنابراین $d(x, y) = 2$ می‌باشد.

اگر $x^2 = 0$ و $y^2 \neq 0$ باشد، آنگاه $\{x, y\} - Z(R^*)$ با $b = 0$ موجود است.

اگر $bx = 0$ باشد، آنگاه $x - b - y$ یک مسیر به طول 2 است.

اگر $bx \neq 0$ باشد، آنگاه $x - bx - y$ یک مسیر به طول 2 است. لذا در هر دو حالت، $d(x, y) = 2$ است.

اگر $x^2 \neq 0$ و $y^2 = 0$ باشد، آنگاه با استدلال مشابه نتیجه می‌گیریم که $d(x, y) = 2$ است.

حال فرض کنید که x^2, xy, y^2 همه خلاف صفر باشند. در آن صورت:

$$ax = by = 0 \text{ با } a, b \in Z(R^*) - \{x, y\}$$

موجود است.

اگر $a = b$ باشد، آن گاه $x - a - y$ یک مسیر به طول 2 است. پس فرض کنید $a \neq b$ است.

اگر $ab = 0$ باشد، آن گاه $x - a - b - y$ یک مسیر به طول 3 است. بنابراین می توان نوشت:

$$d(x, y) \leq 3$$

اگر $ab \neq 0$ باشد، آن گاه $x - ab - y$ یک مسیر به طول 2 است. پس $d(x, y) = 2$ و لذا $d(x, y) \leq 3$ می باشد. در نتیجه $diam(\Gamma(R)) \leq 3$ است

[16].

مثال 1: اگر $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ باشد، آن گاه $diam(\Gamma(R)) = 3$ است.

حل:

$$(\bar{0}, \bar{1})(\bar{0}, \bar{2}) \neq (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})(\bar{1}, \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2}) \neq (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{1}, \bar{0})(\bar{1}, \bar{2}) \neq (\bar{0}, \bar{0})$$

از طرف دیگر:

$$(\bar{0}, \bar{1})(\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0})(\bar{0}, \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2})(\bar{1}, \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

است.

پس مسیر $(\bar{0}, \bar{1}) - (\bar{1}, \bar{0}) - (\bar{0}, \bar{2}) - (\bar{1}, \bar{2})$ را در گراف قاسم های صفر رینگ $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ داریم. بنابراین $diam(\Gamma(R)) = 3$ می باشد [17]

نتیجه 2: فرض کنید F_p و F_q دو فیلد به ترتیب با p (اولیه) عنصر و q (اولیه) عنصر باشند، در آن صورت:

$$\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times F_q) = K_{1, q-1} \text{ و } \Gamma(F_p \times F_q) = K_{p-1, q-1}$$

است [18].

3. نتیجه گیری

با بررسی نقش گراف قاسم های صفر در رینگ ست طاققت به نتایج زیر دست یافته ایم:

1. اگر تعداد عناصر ست $X \neq \emptyset$ کمتر از 4 باشد، آن گاه گراف قاسم های صفر رینگ $P(X)$ مسطح است.

2. اگر تعداد عناصر ست X بزرگتر یا مساوی 4 باشد، آن گاه گراف قاسم های صفر رینگ $P(X)$ مسطح نیست.

References

- [1] J. Morty, *Graph theory and its applications*, translated by Dara Moazami, 4th ed. Tehran: University Publishing Center, 2006.
- [2] Friendship, *Graph theory and its applications*, 3rd ed. Tehran: Mobtakaran, 1390.
- [3] L. S. Schutz, *Discrete mathematics*, translated by Ali Akbar Alamzadeh, Shamsad Press. Tehran: Kourosh, 1374.
- [4] Nazari, "The role of graph theory in the ring factor," *Kabul University Scientific Journal*, vol. 3, p. 182, 2015.
- [5] Nazari, "Graph of zero qasems in the rings, scientific Journal of Takhar University, " *Research Work for Promotion to the Scientific Rank of the University*, pp. 67-68, 2015.
- [6] Theoretical, "The role of proximity, qccurrence, laplacein and asymptomatic laplacein in graph theory," *Kabul University Scientific Journal*, vol. 3, p. 123, 2016.
- [7] Theoretical, "The importance of graph theory in mathematics," *Scientific Journal of Takhar University*, vol. 2, pp. 81- 88, 1396.
- [8] A. Aleve's, "Graf divisor de zero de um Anal Commutative Claudia Juliana Finely gone," pp. 18-23, 2011.
- [9] L. Bingjun, "Zero-divisor graph of triangular matrix rings over commutative rings1," *International Journal of Algebra*, vol. 5, pp. 255-260, 2011.
- [10] B. Z. Inane and P. M. Zofran, "Zero-divisor graphs of matrices over com- mutative ring," *Comm, Alg*, pp. 11-32, 2009.
- [11] D. F. Anderson, R. Levy, and J. Shapiro, "Zero-divisor graphs, von Neumann regular rings, and Boolean algebras," *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 180, pp. 221-241, 2003.
- [12] D. Cretkovic, M. Droob, and H. Sachs, "Spectra of graphs, theory and applications," 3rd ed. Heidelberg –Leipzig.: Johann Ambrosias Barth Verlag, 1995.
- [13] K. Balinska, M. Kupczyk, S. Simic, and K. Zwierzynski, "On generating all integral graphs on 11 vertices," *Computer Science Center Report*, pp. 1-36, 2000.
- [14] L. Kung-chug and P. Robert, "Ruthanne keego graph theory translation by Joanne Tammie," pp. 1-6, 2008.
- [15] L. Vadis, "Lecture notes on graph theory," pp. 7-44, 2009.
- [16] T. Lucas, "The diameter of a zero-divisor Graph, J. Algebra," vol. 10, 2006.
- [17] V. K. Bhatt and R. Rania, "A not on zero-divisor graph over rings," *J. Contempt. Math, Sci*, vol. 174, 2007.
- [18] W. U. Tongue, "On directed zero-divisor graphs of finite rings," *Discrete Mathematics*, p. 46, 2005.